

Danuta Zaremba



# Jak

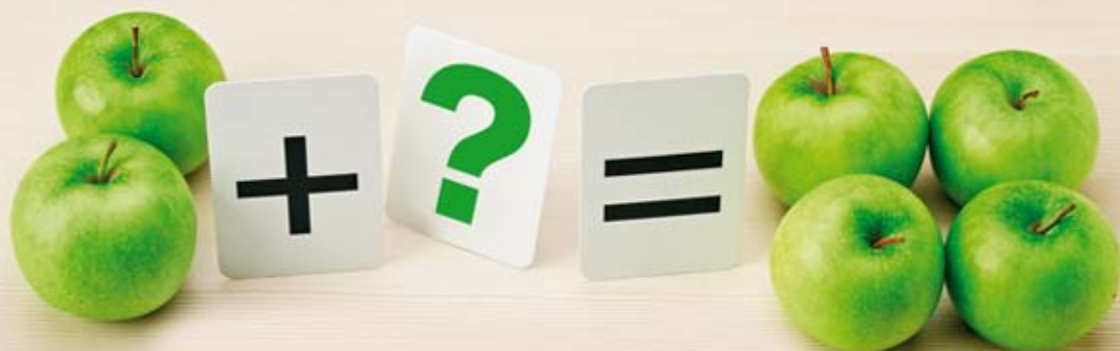
# tłumaczyć dzieciom

# matematykę



$$D = 2a$$

$$d = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$



 **Helion**  
EDUKACJA

Poradnik nie tylko dla rodziców

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Tomasz Waryszak

Projekt okładki: Jan Paluch

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION  
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE  
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!  
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres  
<http://helion.pl/user/opinie/jakmat>  
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-7090-1

Copyright © Helion 2014

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

# Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	<b>7</b>
<b>Rozdział 1. Zrozumieć dziecko</b> .....	<b>9</b>
1.1. Co nieostre, to tępe, czyli logika dziecięca .....	9
1.2. Dlaczego sześcian nie jest sześcianem, czyli o problemach językowych .....	12
1.3. Dlaczego $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ , czyli matematyka na miarę ucznia .....	14
1.4. Czy $2^3$ jest równe 6, czyli uczeń ma prawo do błędu .....	16
1.5. Uczeń w akcji, czyli o odkrywaniu na lekcjach matematyki .....	18
<b>Rozdział 2. Uczymy rachunków</b> .....	<b>23</b>
2.1. Cyfry, liczby, system dziesiętny i rzymski .....	23
2.2. Oś liczbowa .....	26
2.3. Dodajemy .....	28
2.4. Odejmujemy .....	30
2.5. Kolejność dodawania i odejmowania .....	32
2.6. Dodajemy pisemnie .....	34
2.7. Odejmujemy pisemnie .....	35
2.8. Mnożymy .....	37
2.9. Mnożenie z dodawaniem i odejmowaniem .....	41
2.10. Mnożymy pisemnie .....	43
2.11. Dzielimy .....	45
2.12. Dzielimy pisemnie .....	47
2.13. Cechy podzielności liczb .....	49
2.14. Rozwiązujemy zadania tekstowe .....	52
<b>Rozdział 3. Uczymy ułamków</b> .....	<b>57</b>
3.1. Ułamek jako część .....	57
3.2. Ułamek jako liczba .....	62
3.3. Skracamy i rozszerzamy ułamki .....	66
3.4. Dodajemy i odejmujemy ułamki .....	69
3.5. Mnożymy ułamki .....	72

3.6. Dzielimy ułamki .....	76
3.7. Wprowadzamy pojęcie ułamka dziesiętnego .....	78
3.8. Uczymy działań na ułamkach w postaci dziesiętnej .....	81
3.9. Wprowadzamy pojęcie procentu .....	85
3.10. Uczymy obliczać procenty .....	87
3.11. Dalsze obliczenia procentowe .....	89
<b>Rozdział 4. Wprowadzamy w świat geometrii .....</b>	<b>93</b>
4.1. Kilka uwag o nauczaniu geometrii .....	93
4.2. Odcinki i proste .....	96
4.3. Mierzymy długość .....	98
4.4. Okrąg i koło .....	99
4.5. Kąty .....	101
4.6. Mierzymy kąty .....	103
4.7. Badamy własności trójkątów .....	106
4.8. Poznajemy rodzaje czworokątów .....	110
4.9. Obliczamy obwody wielokątów .....	113
4.10. Obliczamy pole prostokąta .....	114
4.11. Obliczamy pola wielokątów .....	117
4.12. Poznajemy prostopadłościan .....	121
<b>Rozdział 5. Rozszerzamy zakres geometrii .....</b>	<b>125</b>
5.1. Co wynika z przystawania .....	125
5.2. Co wynika z symetrii .....	129
5.3. Poszerzamy wiadomości o kole .....	133
5.4. Koło i trójkąt .....	135
5.5. O twierdzeniu Pitagorasa .....	137
5.6. O podobieństwie .....	141
5.7. Graniastosłupy i ostrosłupy .....	145
5.8. Walec, stożek i kula .....	146
<b>Rozdział 6. Uczymy działań na liczbach dodatnich i ujemnych .....</b>	<b>149</b>
6.1. Nadajemy liczbom znaki .....	149
6.2. Dodajemy .....	152
6.3. Odejmujemy .....	153
6.4. Mnożymy i dzielimy .....	156
6.5. Potęgujemy .....	158
6.6. Pierwiastkujemy .....	160
<b>Rozdział 7. Pomagamy zrozumieć algebrę .....</b>	<b>163</b>
7.1. Posługujemy się literami .....	163
7.2. Minusy w wyrażeniach algebraicznych .....	166
7.3. Redukujemy wyrazy podobne .....	169
7.4. Nawiasy w wyrażeniach algebraicznych .....	171
7.5. Układamy równania .....	173

---

7.6. Rozwiązujemy równania .....	177
7.7. Układy równań .....	181
7.8. Uwagi o nierównościach .....	183
<b>Rozdział 8. Badamy zależności między wielkościami .....</b>	<b>185</b>
8.1. Funkcja jako szczególny rodzaj zależności .....	185
8.2. Proporcjonalność prosta .....	187
8.3. Proporcjonalność odwrotna .....	189
8.4. Wykresy empiryczne .....	190
8.5. Wprowadzamy układ współrzędnych .....	192
8.6. Rysujemy wykresy funkcji .....	196



# Wstęp

Wokół matematyki szkolnej narosło wiele nieporozumień. Większość z nas uważa ją za przedmiot, na którym uczniowie zmuszeni są zapamiętywać sztuczne definicje, twierdzenia, reguły i wzory, wykonywać skomplikowane obliczenia i rozwiązywać niełatwe zadania według podanych schematów.

Taka opinia jest wynikiem smutnych doświadczeń szkolnych. Dla wielu z nas matematyka była przedmiotem niezrozumiałym, mieliśmy z nią problemy; teraz problemy z matematyką mają nasze dzieci.

Tymczasem tak być nie musi. Mimo że matematyka nie jest łatwa, można ją skutecznie przybliżyć dzieciom — pod warunkiem, że nawiążemy do doświadczenia dziecka, pozwolimy mu posługiwać się potocznym językiem, a przede wszystkim będziemy odwoływać się do zdrowego rozsądku.

I o tym właśnie jest ta książka. Choć adresuję ją głównie do rodziców, którzy mają dzieci w szkole podstawowej lub gimnazjum i chcą im pomóc w zrozumieniu matematyki, książka może przydać się wszystkim szukającym pomysłów na nauczanie.

Do napisania książki zachęcił mnie Witold Sz wajkowski, któremu w tym miejscu dziękuję.

*Danuta Zaremba*





# Rozdział 1.

## Zrozumieć dziecko

*Zrozumieć dziecko,  
aby być przez niego zrozumianym*

### 1.1. Co nieostre, to tępe, czyli logika dziecięca

#### Z życia klasy

Zacznę od przytoczenia historyjki, którą często opowiadam. Brzmi jak anegdota, ale wydarzyła się naprawdę. Było to na lekcji języka polskiego w czwartej klasie jednej z wrocławskich szkół podstawowych podczas wystawiania ocen na półrocze. Nauczycielka była raczej łagodna, stąd oceny były niezłe. Patrząc na stopnie wpisane do dziennika, nauczycielka zaczęła się głośno zastanawiać, dlaczego uczniowie mają u niej oceny znacznie lepsze niż u innych nauczycieli. Jeden z uczniów, Piotrek, od razu znalazł wyjaśnienie: To dlatego, że Pani nie jest ostra tak jak inni — Pani jest tępa!

Klasa zamarła, a Piotrek zdał sobie sprawę z popełnionej gafy. Na szczęście nauczycielka właściwie odebrała słowa ucznia i — zamiast się obrazić — szczerze się ubawiła, o czym wiem od niej samej. Była to nauczycielka z prawdziwego zdarzenia, rozumiejąca swoich uczniów. Zdawała sobie sprawę z tego, że Piotrek, należący do tych uczniów, którzy szybciej mówią niż myślą, instynktownie kierował się logiką: skoro nie ostre, to tępe.

Tymczasem nauczyciele często traktują podobne wypowiedzi dosłownie, czują się dotknięci i konflikt gotowy. A wystarczyłoby trochę refleksji, by właściwie odczytać intencje ucznia.

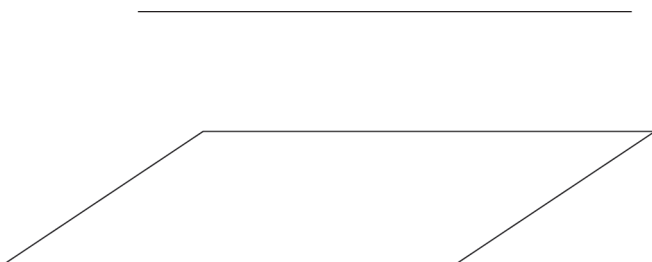
Dziecko myśli logicznie, jest konsekwentne w swoim rozumowaniu. Czasami dochodzi do wniosków, które nas zaskakują i wydają się fałszywe. Skąd się biorą? Otóż dziecko często przyjmuje swoje własne założenia, o których nie zawsze wiemy. Podam parę przykładów ze swojego doświadczenia nauczycielskiego.

## O punktach większych i mniejszych, grubej prostej i czterech połówkach koła

Pamiętam, jak kiedyś rozmawiałam o matematyce z pewnym piątoklasistą. Podczas dyskusji o zadaniu z geometrii pojawiło się pojęcie punktu. Chciałam sprawdzić, jak je uczeń rozumie, więc narysowałam odcinek i zapytałam podchwytliwie, ile jest w nim punktów. Chłopiec popatrzył uważnie na odcinek, zmarszczył czoło, coś mierzył i szacował, a potem odpowiedział z przekonaniem, że „jakieś tysiąc”. Zastanawiałam się, jak zareagować, a wtedy usłyszałam, że punktów mogłoby być jeszcze więcej, gdyby były bardzo małe...

Może Państwo pamiętacie z własnej edukacji, że punkt to jest „coś, co nie ma wymiaru”. Pojęcie punktu jest czysto abstrakcyjne, punkty (te rozważane w geometrii) nie istnieją w naszej rzeczywistości, nie można ich narysować, a zaznaczenie punktu na papierze czy tablicy jest tylko umowną ilustracją tego pojęcia. Punkty, które rysujemy, są grubsze lub cieńsze — w zależności od sytuacji, którą chcemy zilustrować, a także od ołówka czy kredy, których używamy. Tymczasem dziecko odczytuje rysunek tak, jak go widzi, identyfikując punkt z narysowaną kropką. Jest oczywiste, że kropka ta ma pewne wymiary, może być większa lub mniejsza. Nie może być tylko zbyt duża, jeżeli ma być punktem — tak uważają dzieci.

Dzieci, nawet starsze, traktują rzeczy i zjawiska dosłownie. Przypomina mi się moja lekcja geometrii przestrzennej w ósmej klasie szkoły podstawowej (sprzed reformy). Rozważaliśmy sytuację, w której dana jest płaszczyzna oraz prosta do niej równoległa:



Zapytałam, ile jest płaszczyzn przechodzących przez daną prostą i równoległych do danej płaszczyzny. Chciałam sytuację zilustrować, więc wzięłam długopis (miał reprezentować prostą) i ustawiłam go równoległe do blatu stołu (płaszczyzna). Kasia nie miała wątpliwości: dwie! Odpowiedź zaskoczyła mnie, ale zrozumiałam, skąd się wzięła: jedna płaszczyzna **pod** długopisem, druga **nad**...

Nic dziwnego, model prostej był zbyt „gruby”, aby mógł skutecznie reprezentować prostą. Chciałam dobrze, a wyszło nieoczekiwanie. Trzeba przyznać, że inni uczniowie nie byli tak dosłowni i rozumieli umowność sytuacji. W każdym razie trzeba było podyskutować na temat pojęć geometrycznych.

Pamiętam też pewnego czwartoklasistę, który „dzielił koło na cztery połowy”. Narysował jedną średnicę, która podzieliła koło na dwie połowy, po czym dorysował średnicę prostopadłą, otrzymując tym razem również podział na dwie połowy (oczywiście inne). Podsumowując, stwierdził, że narysowane średnice dzielą koło na cztery połowy. Czyż mówił nieprawdę?

## Dowolny — czyli jaki?

Nieporozumienia zdarzają się nie tylko w geometrii. W algebrze przekształcamy wyrażenia z literami. Przykładowo zamiast  $a - (b + c)$  możemy napisać  $a - b - c$ . Dlaczego? Bo dla *dowolnych* liczb podstawionych w miejsce  $a, b, c$  zachodzi równość  $a - (b + c) = a - b - c$ . Pytałam kiedyś uczniów, jak ją uzasadnić. Usłyszałam: podstawić za  $a, b, c$  jakieś konkretne liczby i sprawdzić.

Oczywiście w ten sposób pokażemy tylko, że równość jest prawdziwa dla tych liczb, które podstawimy; nie dowiedzimy, że jest prawdziwa w całej swojej ogólności. Sprawdzając równość dla pewnych liczb, nie możemy wywnioskować, że jest prawdziwa dla pozostałych.

Uczniowie jednak rozumieją przymiotnik „dowolny” po swojemu, zgodnie ze swoim doświadczeniem życiowym. Na co dzień „dowolny” znaczy: taki, jaki chcę, zależny od mojej woli. Jeśli zatem liczby mają być dowolne, mogą je wybrać.

Trzeba czasu, aby uczeń zrozumiał, że „dowolny” w matematyce oznacza to samo, co „każdy”. Określenie: „dla dowolnych” znaczy: „dla wszystkich”, a nie tylko dla wybranych.

Im lepiej zrozumiemy ucznia, tym lepiej potrafimy się z nim porozumieć i tym skuteczniej pomóc mu w przewyciężaniu trudności, jakie niesie matematyka. Rozumienie ucznia, a przynajmniej nieustanne podejmowanie starań w tym kierunku, jest niezbędnym warunkiem dobrego nauczania. Nie wystarczy, że przygotowując się do lekcji, nauczyciel opracuje dany temat w sposób, który jemu wydaje się właściwy. Narzucanie uczniom z góry ustalonego sposobu podejścia do problemu często odnosi skutek inny od zamierzonego. Uczniowie szybko tracą wątek, przestają rozumieć istotę zagadnienia i skupiają się wyłącznie na zapamiętaniu wytycznych nauczyciela. Naśladują pokazany sposób rozwiązywania zadań, przez jakiś czas radzą sobie z typowymi zadaniami, ale po pewnym czasie wszystko zapominają. Na dodatek, przyzwyczajeni do bezmyślnego stosowania reguł i wzorów, zatracają zdolność posługiwania się zdrowym rozsądkiem i nie próbują samodzielnie rozwiązywać nawet prostych problemów. Stąd rodzą się kłopoty z matematyką. Nieporozumienia na linii nauczyciel – uczeń powodują, że trzeba nie tylko uzupełniać, ale często także prostować edukację szkolną naszych dzieci.

Zauważmy, że niektóre zadania sugerują sposób przeprowadzania obliczeń, ale niektóre dopuszczają różne sposoby. Przykładowo obliczając 40% i 60%, można startować zarówno z 10%, jak i 20%.

Warto także poćwiczyć obliczanie procentu liczby, jeżeli nie jest ona dana, ale znamy inny jej procent. Pytajmy więc, jak obliczyć 45% liczby, znając jej 30% — lub odwrotnie. W szczególności polemy znajdowanie liczby (czyli 100%), której pewien procent jest znany.

Oto przykłady kilku ćwiczeń:

- ♦ 15% pewnej liczby wynosi 135. Oblicz 30%, 60%, 5%, 50%, 200% tej liczby.
- ♦ 250% liczby jest równe 124. Jaka to liczba?
- ♦ 30% pewnej liczby jest równe 21. Jaka to liczba?
- ♦ Znajdź liczbę, której: a) 20% wynosi 13, b) 5% wynosi 1.

## 3.10. Uczymy obliczać procenty

### Zdrowy rozsądek zamiast $x$

Na lekcjach matematyki (także chemii) częstym narzędziem do obliczeń procentowych ciągle jeszcze są proporcje z niewiadomą. Stosowane są wtedy, kiedy trzeba obliczyć pewien procent liczby na podstawie innego jej procentu. Oto przykład:

- ♦ 27% pewnej liczby wynosi 351. Ile wynosi 14% tej liczby?

Z reguły zaczyna się tu od proporcji  $\frac{27}{14} = \frac{351}{x}$  (lub innej, równoważnej), gdzie  $x$  oznacza szukaną liczbę.

Tymczasem zadanie to można rozwiązać dokładnie tak, jak w młodszych klasach rozwiązuje się inne zadanie.

- ♦ Za bilety do kina dla 27 osób zapłacono 351 zł. Ile trzeba by zapłacić za bilety dla 14 osób?

Obliczamy najpierw cenę jednego biletu, a potem mnożymy ją przez 14.

Z procentami tak samo. Obliczamy 1% liczby, dzieląc 351 przez 27, a wynik mnożymy przez 14.

Ktoś może powiedzieć, że działania są takie same jak podczas obliczania  $x$  z proporcji. To prawda, ale doszliśmy do tych działań w sposób zdroworozsądkowy. Proporcje zwalniają ucznia od myślenia i obciążają niepotrzebnie jego pamięć. Czasem pamięć zawodzi i uczeń myli się, np.

zamieniając licznik z mianownikiem. Postępuje schematycznie i nie zauważa błędu. Nie bez znaczenia jest też fakt, że proporcje wymagają kartki i ołówka; są niewygodne, jeżeli posługujemy się kalkulatorem.

Podobnie zdroworozsądkowo rozwiązujemy zadanie:

- ◆ 19% pewnej liczby wynosi 76. Jaka to liczba?

Wystarczy zauważyć, że każda liczba stanowi 100% siebie samej, i rozwiązywać zadanie tak jak poprzednie, zastępując 14 przez 100.

W szkole często preferuje się rozwiązywanie zadań za pomocą równań, co z reguły komplikuje postępowanie. Zobaczmy to na przykładzie.

- ◆ Kowalski obliczył, że w przyszłym miesiącu po zapłaceniu podatku stanowiącego 36% miesięcznego wynagrodzenia zostanie mu z pensji 2912 zł. Ile zarabia Kowalski?

Nawyki wyniesione ze szkoły prowadzą do schematu:

wynagrodzenie miesięczne Kowalskiego to  $x$ ,

zapłacony podatek to  $\frac{36}{100}x$ ,

po zapłaceniu podatku zostało  $x - \frac{36}{100}x$ ,

skąd wynika równanie  $x - \frac{36}{100}x = 2912$ .

Wszystko to prawda, tylko po co? Skoro Kowalski zapłacił jako podatek 36% swojego wynagrodzenia, to zostało mu 64% wynagrodzenia. Te 64% to 2912 zł, skąd obliczymy 1%, a potem 100% wynagrodzenia.

## Obniżki i podwyżki

Na dalszym etapie edukacji, w gimnazjum, uczeń oblicza nie tylko „okrągłe” procenty. Obliczenia stają się bardziej skomplikowane i warto sięgać po kalkulator. Punkt wyjścia jest ten sam:  $x\%$  liczby to  $\frac{x}{100}$  tej liczby. Skorzystamy z tego, że znalezienie ułamka liczby oznacza pomnożenie liczby przez ten ułamek. Ułamki wyrażające procenty z reguły zapisujemy w postaci dziesiętnej, szczególnie gdy posługujemy się kalkulatorem.

Trzeba poćwiczyć zamianę procentów na ułamki dziesiętne. Uczeń nie powinien mieć wątpliwości, że 76% to 0,76, 10% to 0,1, 80% to 0,8, 123% to 1,23, 120% to 1,2 itp.

Na początek rozważmy zadanie:

- ◆ Lodówka kosztuje 750 zł. Ile będzie kosztowała po obniżce o 14%?

Na lekcjach matematyki bardzo często postępuje się według schematu: oblicza się 14% z 750, odejmując otrzymaną liczbę od 750.

W ten sposób wykonuje się dwa działania, najpierw mnożenie, a potem odejmowanie. Tymczasem można prościej. Wystarczy zauważyć, że skoro lodówka stanije o 14%, to zostanie 86% jej ceny. Zadanie sprowadza się do jednego działania, mianowicie  $0,86 \cdot 750$ .

Rozważmy teraz sytuację, kiedy lodówka drożeje:

- ♦ Lodówka kosztuje 750 zł. Ile będzie kosztowała po podwyżce o 16%?

I tutaj również nie musimy wykonywać dwóch działań, obliczając  $0,16 \cdot 750$  i dodając znaną liczbę do 750, jeżeli zauważymy, że nowa cena lodówki to 116% kwoty 750. Ponieważ  $\frac{116}{100}$  to 1,16, więc mnożymy  $1,16 \cdot 750$ .

Rozwiązując zadania, w których znamy kwotę po określonej obniżce czy podwyżce, a trzeba obliczyć cenę wyjściową, zaczynamy od przyporządkowania danej kwocie odpowiedniego procentu ceny wyjściowej i na tej podstawie obliczamy 100%.

Takie rozumowanie, i to dwukrotnie, zastosujemy w kolejnym zadaniu:

- ♦ Odkurzacz najpierw podrożał o 20%, a potem stanął o 15% i kosztuje 459 zł. Ile kosztował przed zmianami cen?

Mamy tu trzy ceny odkurzacza: początkową, środkową i końcową. Najlepiej zacząć od tej ostatniej. Skoro odkurzacz stanął o 15%, to ostatnia cena stanowi 85% ceny środkowej. Te 85% to 459, więc 1% to  $459 : 85$ , a 100%, czyli cena środkowa, to 100 razy więcej. Otrzymamy 540 zł. Ta kwota z kolei stanowi 120% początkowej, więc cena początkowa jest równa  $(540 : 120) \cdot 100$ .

## 3.11. Dalsze obliczenia procentowe

### Odpowiadamy na podchwytliwe pytania

Zacznę od mojego ulubionego pytania:

- ♦ Akcje na giełdzie spadły o 50%. O ile procent muszą wzrosnąć, aby wrócić do ceny przed spadkiem?

Wiele razy słyszałam odpowiedź: oczywiście o 50%!

Sprawdźmy. Po spadku o 50% została połowa ceny akcji. Wracając do stanu poprzedniego, musi się ona podwoić, czyli wzrosnąć o siebie samą, a więc o 100%!

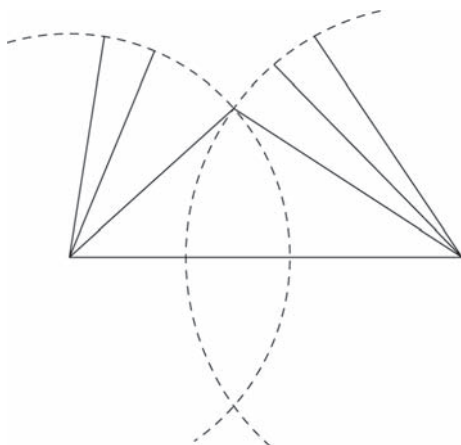
Ten przykład pokazuje dobitnie, że każdy procent trzeba odnieść do odpowiedniej wielkości.

## Konstruujemy trójkąt z trzech odcinków

Postawmy pytanie, jak z trzech odcinków zbudować trójkąt i czy zawsze można to zrobić. Najlepiej byłoby rozwiązywać problem poglądowo, budując trójkąt z patyczków. Trzeba by mieć patyczki różnej długości, wśród nich trzy, z których można utworzyć trójkąt, oraz trzy, które nie mogą być bokami trójkąta.

W trakcie prób uczeń może zauważyć, że jeżeli dwa patyczki są zbyt krótkie w stosunku do trzeciego, to z tej trójki nie da się zbudować trójkąta.

Zauważy to z całą pewnością, jeżeli ustalimy położenie jednego patyczka, dołączymy do jego końców pozostałe dwa patyczki i będziemy je obracać, szukając położenia, w którym się zetkną:



Uczeń zobaczy, po jakich drogach poruszają się końce ruchomych odcinków, i będzie umiał narysować trójkąt o danych trzech bokach, posługując się cyrklem i linijką. Rysowanie z użyciem tych dwóch przyrządów nazywamy konstruowaniem.

Porozmawiajmy o wykonalności konstrukcji, pytając, czy rysowane okręgi zawsze (tzn. przy każdych długościach odcinków) się przecinają. W ten sposób doprowadzimy do sformułowania warunku trójkąta: suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

Podczas konstrukcji uczeń zauważa, że wszystkie trójkąty konstruowane z trzech danych odcinków są jednakowe. W tym sensie trzy boki trójkąta wyznaczają trójkąt jednoznacznie.

## Znajdujemy sumę kątów trójkąta

Zacznę od uwagi dotyczącej terminologii. Kąt występuje w geometrii w dwojakim sensie: jako figura geometryczna i jako rozwartość ramion, mierzona w stopniach. Dwuznaczność ta nie prowadzi do nieporozumień, bo z kontekstu wynika, o jakie znaczenie kąta chodzi w danym przypadku. Mówiąc o sumie kątów trójkąta, mamy na myśli sumę ich miar.

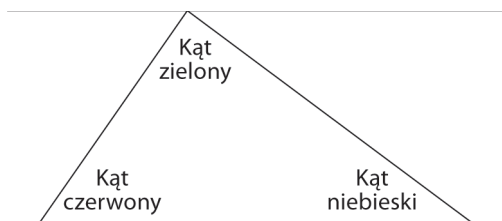
Jeżeli uczeń jeszcze nie zna twierdzenia o sumie kątów trójkąta, można zacząć od doświadczeń z konkretnymi trójkątami. Zwykle robi się to na dwa sposoby.

Możemy polecić narysowanie dwóch czy trzech trójkątów, zmierzenie w każdym trzech kątów i obliczenie ich sumy. Jeżeli ołówek będzie dobrze zatemperowany, trójkąty starannie narysowane, a kąty zmierzone dostatecznie dokładnie, to wyniki dodawania będą bliskie  $180^\circ$ .

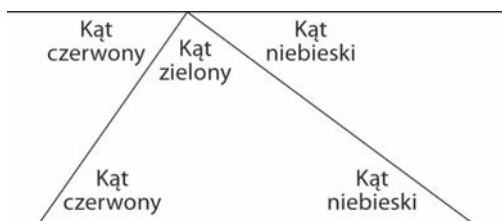
Drugi sposób polega na wycięciu trójkąta i oderwaniu jego kątów, które układamy jeden obok drugiego. Obrazek w sposób wymowny ukaże kąt półpełny.

Oba doświadczenia pozwalają wysnuć hipotezę, że suma kątów każdego trójkąta jest równa  $180^\circ$ . Spróbujmy pokazać potrzebę sprawdzenia tej hipotezy w sposób ogólny, tzn. nie korzystając z własności konkretnych trójkątów, a tylko posługując się tym, co przysługuje każdemu trójkątowi. Chociaż posłużymy się rysunkiem konkretnego trójkąta, będziemy abstrahować od jego kształtu i wymiarów.

Polemy narysować trójkąt i pomalować jego kąty różnymi kolorami, np. na czerwono, zielono i niebiesko. Polemy także dorysować prostą równoległą do jednego boku trójkąta i przechodzącą przez przeciwległy wierzchołek:



Uczeń nie będzie miał trudności ze wskazaniem kątów równych kątowi czerwonemu i zielonemu — niech je zamaluje tymi samymi kolorami:



Z rysunku łatwo odczytać, że kąty czerwony, zielony i niebieski dają w sumie kąt półpełny.

Podkreślmy, że w rozważaniach nie grały roli ani długości boków, ani miary kątów — trójkąt mógł być dowolny. Wobec tego wniosek jest prawdziwy dla wszystkich trójkątów.

Przedstawiony dowód jest bardzo poglądowy. Pokolorowanie kątów ułatwia zobaczenie tego, co trzeba.



Na zakończenie zauważmy, że potrafimy obliczyć sumę kątów dowolnego wielokąta, dzieląc go na trójkąty. W szczególności dowolny czworokąt podzielimy przekątną na dwa trójkąty, więc suma kątów czworokąta jest równa  $360^\circ$ .

## Klasyfikujemy trójkąty

Twierdzenie o sumie kątów trójkąta daje okazję do rozwiązywania zadań uczących wnioskowania. Na takie zadania nie żałujmy czasu, pytając:

- ♦ Ile kątów rozwartych może mieć trójkąt?
- ♦ Ile kątów prostych może mieć trójkąt?
- ♦ Czy w trójkącie może być kąt prosty i kąt rozwarty?

Oczywiście chodzi o to, aby uczeń dokładnie uzasadnił swoją odpowiedź. Upewnijmy się przedtem, czy uczeń pamięta, co to są kąty ostre i rozwarte.

Przy sposobności podajmy klasyfikację trójkątów ze względu na kąty: ostrokątne, rozwartokątne i prostokątne.

Klasyfikacja trójkątów ze względu na boki jest trudniejsza, niektórym mylą się trójkąty równoramienne z równobocznymi. Wynika to stąd, że boki trójkąta (dowolnego) są czasem nazywane przez uczniów ramionami.

Ponadto trudno zrozumieć, że każdy trójkąt równoboczny jest jednocześnie równoramienny, bo trudne jest określenie „co najmniej”. Trzeba uczniom wyjaśnić znaczenie tego słowa, nawiązując do sytuacji z życia codziennego<sup>4</sup>. Powiedzmy np. o sprawdzianie, którego zaliczenie wymaga co najmniej 5 punktów, a maksymalna liczba punktów wynosi 10. Ile punktów może dostać uczeń, aby zaliczyć sprawdzian?

Zapytajmy, co w przypadku trójkąta oznacza sformułowanie „co najmniej dwa boki”. Uczeń powinien rozumieć, że znaczy to zarówno „tylko dwa boki”, jak i „trzy boki”. Stąd wywnioskuje, że trójkąt równoramienny, czyli trójkąt mający co najmniej dwa boki równe, może mieć trzy boki równe, czyli być równoboczny.

Podyskutujmy o sposobach narysowania trójkąta równoramiennego i równobocznego, w zależności od tego, jakie przybory geometryczne mamy do dyspozycji. Posłużmy się cyrklem i skorzystajmy z opisanej wcześniej konstrukcji, odpowiednio dobierając długości odcinków. Kiedy natomiast mamy do dyspozycji kątomierz, możemy odmierzać kąty. Uczeń widzi, że w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe, a w trójkącie równoramiennym równe są co najmniej dwa. W pierwszym przypadku trzeba więc odmierzać po  $60^\circ$ , a w drugim wystarczy odmierzyć dowolne dwa kąty równe.

<sup>4</sup> W sensie potocznym zamiast „co najmniej” zwykle mówimy „przynajmniej”.

# Rozdział 6.

## Uczymy działań na liczbach dodatnich i ujemnych

*Działania, w których pojawiają się liczby ujemne, są zdecydowanie abstrakcyjne. Wprowadzie liczby ze znakami mają pewne odniesienia do życia codziennego, nawet czasem je dodajemy (np. obliczając średnią temperatur, wśród których są temperatury powyżej i poniżej zera), jednak pozostałe działania nie mają praktycznego znaczenia.*

*Liczby ujemne znajdują zastosowanie przede wszystkim w algebrze. Dzięki nim równanie  $x + 2 = 1$  ma rozwiązanie.*

### 6.1. Nadajemy liczbom znaki

#### Plusy i minusy — w życiu i w matematyce

O liczbach ze znakami „+” oraz „-” uczeń może usłyszeć w sytuacjach życia codziennego. Znaki te bywają używane do określenia położenia różnych wielkości względem określonego poziomu i informują, czy dana wielkość jest powyżej, czy poniżej tego poziomu: temperatura względem zera na termometrze, miejsce na ziemi względem poziomu morza, piętro względem parteru itp.

Liczby ze znakami mogą także służyć do opisu stanu konta bankowego, mogą oznaczać punkty zdobywane w grach lub zawodach sportowych, występują czasem w ocenach szkolnych.

Jak łatwo zauważyć, w sytuacjach życiowych liczby dodatnie często są „lepsze” od ujemnych. W ogóle przymiotnik „dodatni” oznacza z reguły coś pozytywnego, w przeciwieństwie do przymiotnika „ujemny”, który przeważnie wiąże się z czymś negatywnym.

Z matematycznego punktu widzenia liczby dodatnie i ujemne są równouprawnione. Nie ma znaczenia, czy rozwiązaniem równania jest  $-1$ , czy  $+1$ . Tak uważamy teraz, jednak nie zawsze tak było. Liczby ujemne z trudem torowały sobie drogę do matematyki, wielu wybitnych matematyków nie chciało ich zaakceptować.

W matematyce każda liczba rzeczywista różna od zera jest dodatnia lub ujemna, natomiast w życiu codziennym jest inaczej. Na co dzień operujemy liczbami, które nie mają znaków. Wyrażają one ilość czegoś — pieniędzy, kilometrów, kilogramów, lat, uderzeń serca na minutę, stopni Celsjusza itp. Przed niektórymi z nich sensowne jest postawienie w pewnych kontekstach znaku plus lub minus. Nie zmienia on liczby, a tylko nadaje jej odpowiednie znaczenie. Przykładowo znaki w  $+7^\circ$  i  $-7^\circ$  mówią tylko o tym, czy te 7 stopni jest powyżej, czy poniżej zera, natomiast  $+500$  zł i  $-500$  zł oznaczają (odpowiednio) posiadanie 500 zł lub debet w tej wysokości.

Tak też kiedyś było w matematyce szkolnej. Jeszcze kilkadziesiąt lat temu uczono o liczbach bezwzględnych (tzn. bez znaków) i względnych (tzn. dodatnich i ujemnych). Potem taki podział poddano krytyce, uznając, że nie przystaje do matematyki jako dziedziny nauki. Miejszy jednak świadomość, że w wielu zagadnieniach praktycznych wprowadzanie znaków liczb jest nie tylko niepotrzebne, ale wręcz sztuczne.

## Czy pisać plusy

W obecnych podręcznikach szkolnych każda liczba jest dodatnia lub ujemna, przy czym tylko pisanie minusa jest obowiązkowe. Przyjęto umowę, że przed liczbami dodatnimi opuszcza się znak plus. Zamiast pisać  $+7$ , piszemy po prostu 7 — tak jak pisaliśmy przed poznaniem liczb ujemnych. Trzeba do tego przyzwyczaić uczniów, chociaż uważam, że na etapie poznawania liczb dodatnich i ujemnych lepiej każdą liczbę zaopatrywać w znak. Uwidacznia to przeciwieństwa między tymi liczbami, więc może pomóc w wykonywaniu działań. Przykładowo równość  $(+3) + (-3) = 0$  jest intuicyjna, bo „tyle samo minusów i plusów wzajemnie się redukuje”. Natomiast liczby 3 i  $-3$  nie są już tak ewidentnie przeciwne.

Przyjrzyjmy się symbolom „+” i „-”. Mają one dwojakie znaczenie. Są używane nie tylko jako znaki liczb, ale są także symbolami działań: dodawania i odejmowania. Jest to pewien problem dla ucznia, który musi się oswoić z tą sytuacją i nauczyć się przypisywać tym symbolom znaczenie wynikające z kontekstu, w jakim występują. Oczywiście wymaga to nie tylko czasu, ale i odpowiedniego podejścia z naszej strony. Zastanówmy się, jak pomóc naszym podopiecznym.

Rozpatrzmy np. wyrażenie  $(-5) - (+2)$ . Jak je przeczytać? Sformułowanie „minus pięć minus plus dwa” nie jest czytelne. Będzie lepiej, jeżeli środkowy minus, oznaczający odejmowanie,

przeczytamy: „odjąć”. Wtedy wyróżnimy dwie liczby i jedno działanie między nimi: „minus pięć odjąć plus dwa”. Proponuję więc, aby plus i minus oznaczające działania czytać: „dodać” i „odjąć”. Tak jest znacznie łatwiej zrozumieć, co trzeba zrobić.

Zauważmy, że zamiast „dodać”, mówimy często „i”, szczególnie w przypadku większej liczby składników. Spójnik ten jest adekwatny do dodawania, bo oznacza łączenie, a taki jest sens potocznego znaczenia terminu „dodawanie”.

Przypominam sobie, że w jednym z dawniejszych podręczników amerykańskich symbole „+” i „-” były pisane dwoma rodzajami czcionek — właśnie w zależności od znaczenia. Symbole, które oznaczały znaki liczb, były pisane mniejszą czcionką i na dodatek u góry liczby. To był niezły pomysł. Sprawdził się w mojej praktyce nauczycielskiej.

## Tradycyjny termometr modelem osi liczbowej

Przypisując liczbom znaki, zaczynamy od przykładów z życia codziennego. Przykładem numer jeden jest zwykle temperatura. Z matematycznego punktu widzenia najlepiej mierzyć ją zwykłym termometrem okiennym z pionową skalą, który pozwala zobaczyć liczby dodatnie i ujemne na osi liczbowej.

Oczywiście oś liczbową można rysować w różnych położeniach. Najczęściej rysujemy poziomo, bo tak jest wygodnie i tak jesteśmy przyzwyczajeni. Warto jednak posłużyć się także osią pionową, szczególnie na początku. Oś pionowa ma wiele zalet; przede wszystkim w sposób naturalny wprowadza porządek w zbiorze liczb, ułatwiając ich porównywanie. Liczba jest tym większa, im wyżej leży. Kierunki „góra” i „dół” są oczywiste, podczas gdy z kierunkami „w prawo” i „w lewo” uczniowie miewają kłopoty.

Uczniowie miewają też problemy z porównywaniem liczb ujemnych. Zdarza im się błędnie uznać liczbę  $-10$  za większą od liczby  $-5$ . Coś w tym jest, bo w odniesieniu do temperatury  $-10$  oznacza większy mróz niż  $-5$ . Liczba  $-10$  jest jakby bardziej ujemna niż  $-5$ . Trzeba o tym podyskutować, pamiętając, że rozstrzygający jest porządek na osi: im liczba jest niżej, tym jest mniejsza.

Oś liczbowa pomaga wprowadzić pojęcie liczb przeciwnych i wartości bezwzględnej (inaczej zwanej modułem). Liczby przeciwne to takie, które leżą po różnych stronach zera i są jednakowo od niego odległe<sup>1</sup>, a wartością bezwzględną liczby nazywamy jej odległość od zera. Nie zapomnijmy wyjaśnić, że „bezwzględna” oznacza w tym przypadku „bez względu na znak”, np.  $-7$  i  $+7$  mają taką samą wartość bezwzględną. W ten sposób ułatwimy zapamiętanie tego pojęcia.

---

<sup>1</sup> Dodatkowo przyjmujemy, że liczba 0 jest przeciwna do siebie samej.

## 6.2. Dodajemy

### Model finansowy

Działania na liczbach dodatnich i ujemnych demonstrujemy na liczbach całkowitych. Kiedy uczniowie dobrze je opanują, rozszerzenie działań na ułamki nastąpi automatycznie.

Zaczynamy od dodawania, które nie sprawia większych problemów, jeżeli uczeń sprawnie dodaje i odejmuje liczby naturalne. Nie podawajmy żadnych reguł dodawania, natomiast dostarczmy modele, które umożliwią intuicyjne podejście do tego działania. Warto zaprezentować kilka modeli. Wtedy każdy znajdzie taki, który do niego przemawia.

Najbardziej chyba popularny jest model, w którym liczby dodatnie oznaczają kwoty posiadane przez ustaloną osobę, a liczby ujemne — jej długi. Można tu myśleć o koncie bankowym, o wpłatach i wypłatach. Uczeń potrafi znaleźć wynik dwóch (i więcej) operacji na koncie, niekoniecznie zdając sobie sprawę, że właśnie znajduje sumę liczb. Jest to zrozumiałe, bo w przypadku liczb o różnych znakach dodawanie sprowadza się do odejmowania. Jeżeli np. na koncie jest  $-200$  (zł) i  $+150$  (zł), to kiedy chcemy znaleźć wynik tych dwóch operacji, odejmujemy  $200 - 150$  i różnicę opatrujemy znakiem „-”.

W dodawaniu warto dostrzegać redukcję. Przykładowo w sumie  $(-200) + (+150)$  liczba  $+150$  redukuje się z liczbą  $-150$  (wziętą z  $-200$ ) i zostaje  $-50$ .

Zamiast mówić o wpłatach i wypłatach na kontach bankowych, możemy interpretować liczby całkowite jako punkty dodatnie i ujemne przyznawane w pewnej grze lub na zawodach sportowych. Uczniowie rozumieją intuicyjnie, że dowolna liczba punktów dodatnich równoważy taką samą liczbę punktów ujemnych. Potrafią obliczyć, jaki jest ostateczny rezultat gracza lub zawodnika, jeżeli zdobył 8 punktów dodatnich i 5 ujemnych lub na odwrót.

### Jeździmy windą

Chciałabym zaproponować jeszcze jeden model, bardziej obrazowy i może bardziej adekwatny do zainteresowań ucznia szkoły podstawowej. Jest to model, w którym liczby dodatnie są utożsamiane z ruchami po pionowej osi liczbowej. Umawiamy się, że liczby dodatnie oznaczają przemieszczanie w górę, a liczby ujemne to przemieszczanie w dół, przy czym o wielkości przemieszczenia decyduje wartość bezwzględna liczby. I tak  $+3$  oznacza przemieszczenie o 3 jednostki w górę, a  $-4$  oznacza przemieszczenie o 4 jednostki w dół. W ten sposób dodawanie liczb sprowadzamy do dodawania (wykonywania jednego po drugim) ruchów, co jest dla ucznia czynnością łatwo wyobrażalną, a nawet manualnie wykonywalną. Dodając ruchy, startujemy z punktu zero. Z punktu zero przenosimy się zgodnie z pierwszym ruchem, po czym z nowej pozycji wykonujemy drugi ruch. Przykładowo dodając  $(+3) + (-4)$ , przemieszczamy się z punktu

zero o 3 jednostki w górę, a potem, startując z punktu  $+3$ , przemieszczamy się o 4 jednostki w dół. Niech uczeń wykona te czynności, np. przesuując po osi swój palec. W ten sposób palec znajdzie się w punkcie  $-1$ :

$$(+3) + (-4) = -1.$$

Podczas poruszania się po osi uczeń utożsamia każdą liczbę z odpowiednią liczbą przesunięć typu  $+1$  lub  $-1$ . Dodając, korzysta z tego, że  $+1$  i  $-1$  wzajemnie się znoszą. Widzę tu podobieństwo do wspomnianego już wcześniej podręcznika amerykańskiego, gdzie każdą liczbę przedstawiano jako pewien zbiór plusów lub minusów, przykładowo  $+3 = + + +$ ,  $-2 = - -$ . Podczas dodawania uczeń amerykański korzystał z tego, że plus i minus się redukują.

Opisując model z poruszaniem się po osi, można nawiązać do jazdy windą. W windach parter jest oznaczony liczbą 0, bywają też piętra  $-1$  czy  $-2$ . Nie będzie problemu z wyobrazeniem sobie superwindy, która jeździ w górę i w dół po nieskończenie wielu piętrach, oznaczonych liczbami całkowitymi, czyli jeździ wzdłuż osi liczbowej.

Po krótkim czasie „jeżdżenia windą” model przestanie być potrzebny, uczeń nauczy się dodawać w sposób abstrakcyjny. Kiedy jednak pojawią się jakiegokolwiek trudności, przypomnijmy o jeździe windą.

Model z windą pozwala zauważyć, że wynik dodawania nie zależy od kolejności, w jakiej je wykonujemy. Wszystko jedno, czy winda pojedzie najpierw 10 pięter w górę, a potem 5 pięter w dół, czy na odwrót, jeżeli za każdym razem startuje z tego samego punktu.

W zakresie liczb dodatnich suma liczb jest większa niż składniki. Po dołączeniu liczb ujemnych własność ta przestaje być prawdziwa, co uczeń powinien zobaczyć na przykładach.

## 6.3. Odejmujemy

### Gdzie leży trudność

W przeciwieństwie do dodawania w odejmowaniu może pojawić się problem wykonalności tego działania. Zgodnie z potocznym znaczeniem odejmowania i dotychczasowym doświadczeniem arytmetycznym ucznia, odjąć można tylko to, co znajduje się w odjemnej. Tak więc możliwe jest odjęcie  $(+3) - (+2)$  oraz  $(-3) - (-2)$ , ale odejmowanie  $(+3) - (-2)$  lub  $(-3) - (+2)$  wydaje się niewykonalne.

Niełatwo pokazać, że każdą liczbę można odjąć od każdej. Spróbujmy zastanowić się, jak zinterpretować odejmowanie na modelach.

Zacznijmy od modelu z kontem bankowym, na którym dokonuje się operacji wpłat i wypłat, oznaczając je odpowiednio „+” i „-”. W tym modelu przez odjęcie operacji będziemy rozumieć

# PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



- 1. ZAREJESTRUJ SIĘ**
- 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI**
- 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ**

Zmień swoją stronę WWW  
w działający bankomat!

**Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!**

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA WYDAWNICZA

 **Helion SA**

$$s^2 = H^2 + a^2$$



**Po co ludzie uczą się matematyki?  
Żeby uczyć matematyki innych.**

**Hugo Steinhaus**

Szkolna matematyka nie cieszy się najlepszą sławą. Po zmaganiach z dodawaniem patyczków i odkładaniem ich na bok dla większości dzieciaków zaczynają się schody. Schody o pewnej wysokości, kątach, bokach. I tak co najmniej do matury. Nadchodzi zło, mrok i matematyka.

Matematyka, sama w sobie niezwykle logiczna, przez młodych ludzi jest odbierana zupełnie inaczej. Wiąże się to z różnicami w postrzeganiu świata, sztucznymi definicjami i niezrozumiałym nazewnictwem. Mamy jednak dobrą wiadomość: matematykę można dzieciom przybliżyć! Wystarczy, że nawiążemy do ich własnych doświadczeń, pozwolimy im posługiwać się potocznym językiem, a przede wszystkim będziemy się odwoływać do zdrowego rozsądku.

**Ta książka jest przeznaczona dla rodziców, których pociechy uczęszczają do szkół podstawowych i gimnazjów. Przyda się również nauczycielom, którzy szukają nieszablonowych pomysłów, by pomóc uczniom oswoić świat ułamków i wielokątów, a także całej reszcie, żyjącej w przekonaniu, że matematyka jest tylko dla wybranych.**

Nr katalogowy: 13605



Księgarnia internetowa  
<http://helion.pl>



Zamówienia telefoniczne:  
**0 801 339900**



**0 601 339900**



Sprawdź najnowsze promocje:  
• <http://helion.pl/promocje>  
Książki najchętniej czytane:  
• <http://helion.pl/bestsellery>  
Zamów informacje o nowościach:  
• <http://helion.pl/nowosci>

Helion SA  
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice  
tel.: 32 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
<http://helion.pl>

**helion.pl**  
księgarnia  
internetowa

Cena 29,90 zł

ISBN 978-83-246-7090-1



9 788324 670901

Informatyka w najlepszym wydaniu